ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.76

О ПОДМНОГООБРАЗИЯХ КОРАЗМЕРНОСТИ ТРИ

П.П. Ефрос

(Кишиневский университет)

1.Рассмотрим гладкую поверхность V_p в евклидовом пространстве E_{p+3}. Отнесем поверхность к подвижному реперу $R^x = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha)$($i, j, k = 1, 2, \ldots, p$; $\alpha, \beta = p+1, p+2, p+3$), где орты $\vec{e}_i \in T_x(V_p)$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_3(x)$ поверхности V_p. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \qquad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha,$$

$$d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta.$$

В плоскости главной нормали $N_q(x)$ поверхности V_p [1], когда $\dim N_q(x) = 3$, определена вторая поляра [2] точки x относительно присоединенной (фокусной) поверхности [1]. Она является поверхностью второго порядка в $N_3(x)$, не проходящей через точку x, и задается уравнением

$$A_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + 2A_{\alpha 0} y^\alpha + p(p-1) = 0$$

в ортонормированном репере. Здесь

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(b^\alpha_{ii} b^\beta_{jj} + b^\beta_{ii} b^\alpha_{jj} - 2b^\alpha_{ij} b^\beta_{ij}), \quad A_{\alpha 0} = -(p-1)\sum_i b^\alpha_{ii}$$

и b^α_{ij} -второй основной тензор поверхности. Вторая поляра точки x относительно присоединенной поверхности не может быть мнимым эллипсоидом, мнимым конусом, гиперболическим параболоидом, цилиндрической поверхностью, однополостным гиперболоидом [3]. Покажем существование поверхностей $V_3 \subset E_6$, у которых вторая поляра точки x относительно присоединенной поверхности является конусом второго порядка, эллипсоидом, двуполостным гиперболоидом, эллиптическим параболоидом.

2.Пусть поверхность $V_3 \subset E_6$ с трехмерной главной нормалью является 3-ортогонально сопряженной системой. Для этого необходимо и достаточно, чтобы поверхность V_3 несла сеть линий кривизны. Отнеся поверхность к реперу, построенному на касательных к линиям сети линий кривизны, имеем $b^\alpha_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Инвариант K_4 второй поляры точки x равен нулю, а инвариант $J_3 = 2(\vec{b}_{11}, \vec{b}_{22}, \vec{b}_{33})^2 \neq 0$, где $\vec{b}_{ii} = b^\alpha_{ii}\vec{e}_\alpha$, $(\vec{b}_{11}, \vec{b}_{22}, \vec{b}_{33})$ - смешанное произведение векторов в $N_3(x)$. Таким образом, вторая поляра точки x является конусом второго порядка. Как известно, 3-ортогонально сопряженная система в E_6 существует с произволом трех функций двух аргументов.

3. Рассмотрим в E_6 поверхность V_3 с трехмерной главной нормалью, для которой в ортонормированном репере выполняется равенство $\vec{b}_{11} = -\vec{b}_{22}$ и хотя бы три из векторов $\vec{b}_{22}$, $\vec{b}_{12}, \vec{b}_{13}, \vec{b}_{23}$ некомпланарны. Система дифференциальных уравнений такой поверхности имеет вид:

$$\omega^\alpha = 0 \qquad (\alpha, \beta = 4, 5, 6),$$

$$\omega_i^\alpha = b^\alpha_{ij}\omega^j \qquad (i = 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$\omega_1^\alpha = -b^\alpha_{22}\omega^1 + b^\alpha_{12}\omega^2 + b^\alpha_{13}\omega^3.$$

Продолжая систему (1), получаем

$$\Delta b^\alpha_{ks} \wedge \omega^s = 0 \qquad (k, s = 1, 2, 3), \tag{2}$$

где $\Delta b^\alpha_{ks} = db^\alpha_{ks} - b^\alpha_{k\ell}\omega^\ell_s - b^\alpha_{\ell s}\omega^\ell_k + b^\beta_{ks}\omega^\alpha_\beta$.

Из 18 форм $\Delta b^\alpha_{\ell j}$ независимы только 17. Характеры системы (2) равны: $S_1 = 9$, $S_2 = 6$, $S_3 = 2$. Число Картана $Q = 27 = N$. Искомая поверхность существует с произволом двух функций трех аргументов. Инварианты J_1, J_2, J_3, K_4 второй поляры точки x относительно присоединенной поверхности удовлетворяют неравенствам $J_1 \cdot J_3 > 0$, $J_2 > 0$, $K_4 \neq 0$, которые показывают, что вторая поляра точки x является эллипсоидом.

Направление $\omega^1 = \omega^2 = 0$ является основным [4] на такой поверхности V_3.

4. Пусть скалярная кривизна поверхности $V_3 \subset E_6$ равна нулю и инвариант K_4 второй поляры точки x отличен от нуля. Такие поверхности задаются системой дифференциальных уравнений

$$\omega^\alpha = 0 , \qquad \omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \tag{3}$$

и соотношением

$$\sum_{i,j} (\vec{b}_{ii} \vec{b}_{jj} - \vec{b}_{ij}^2) = 0 . \tag{4}$$

Продолжая систему (3) и соотношение (4), находим

$$\Delta b_{ij}^\alpha \wedge \omega^j = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i,j} (\vec{b}_{ii}\, d\vec{b}_{jj} + \vec{b}_{jj}\, d\vec{b}_{ii} - 2\vec{b}_{ij}\, d\vec{b}_{ij}) = 0 , \tag{6}$$

где

$$\Delta b_{ij}^\alpha = d b_{ij}^\alpha - b_{ik}^\alpha \omega_j^k - b_{kj}^\alpha \omega_i^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha . \tag{7}$$

Используя (7), из (6) получаем

$$\sum_\alpha [(b_{11}^\alpha + b_{22}^\alpha)\Delta b_{33}^\alpha + (b_{11}^\alpha + b_{33}^\alpha)\Delta b_{22}^\alpha + (b_{22}^\alpha + b_{33}^\alpha)\Delta b_{11}^\alpha - \\ - 2 b_{12}^\alpha \Delta b_{12}^\alpha - 2 b_{13}^\alpha \Delta b_{13}^\alpha - 2 b_{23}^\alpha \Delta b_{23}^\alpha] = 0 . \tag{8}$$

Отсюда следует, что из 18 форм Δb_{ij}^α независимы только 17. Имеем $S_1 = 9$, $S_2 = 6$, $S_3 = 2$. Число Картана $Q = 27$.

Разрешая уравнения (5) по лемме Картана, получаем

$$\Delta b_{ij}^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k ,$$

где b_{ijk}^α симметричны по нижним индексам. Равенство (8) накладывает на 30 параметров b_{ijk}^α три соотношения, поэтому существенных параметров b_{ijk}^α будет $N = 27 = Q$.

Система (5) находится в инволюции и определяет поверхность $V_3 \subset E_6$ с произволом двух функций трех аргументов.

Вторая поляра точки x является двуполостным гиперболоидом.

5. Пусть поверхность $V_3 \subset E_6$ несет семейство асимптотических линий.

Вектор ортонормированного репера направим по касательной к асимптотической линии. Тогда $b_{11}^\alpha = 0$ $(\alpha, \beta = 4,5,6)$. Пусть инвариант J_3 второй поляры точки x равен нулю, т.е. вторая поляра точки x является эллиптическим параболоидом. Такие поверхности задаются системой уравнений

$$\omega^\alpha = 0 , \qquad J_3 = 0 ,$$

$$\omega_1^\alpha = b_{12}^\alpha \omega^2 + b_{13}^\alpha \omega^3 ,$$

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \qquad (i,s = 2,3 \;;\; j,k = 1,2,3)$$

и существуют с произволом одной функции трех аргументов.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Лит. математ. сб./АН Лит.ССР. Вильнюс, 1966. Т.6. № 4. С.15-31.

2. Е с и н В.А. О поверхностях коразмерности два // Геометрия погруженных многообразий : Сб. научн. тр. / МГПИ им. В.И. Ленина. М., 1981. С.17-22.

3. Е ф р о с П.П. Об омбилических поверхностях // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калининградский ун-т. Калининград, 1986. Вып. 17. С.26-29.

4. Chen B.-Y., Yano K. Minimal submanifolds of a higher dimensional sphere: Tensor, 1971. v. 22. p. 369-373.